

LEHRBUCH

Bernhard Ganter

# Diskrete Mathematik: Geordnete Mengen



Springer Spektrum

---

**Springer-Lehrbuch**

---

Bernhard Ganter

# Diskrete Mathematik: Geordnete Mengen

 Springer Spektrum

Bernhard Ganter  
Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften  
Technische Universität Dresden  
Dresden, Deutschland

ISSN 0937-7433  
ISBN 978-3-642-37499-9      ISBN 978-3-642-37500-2 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-642-37500-2

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Mathematics Subject Classification (2010): 06Axx, 68R01, 68T30

Springer Spektrum

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media  
[www.springer-spektrum.de](http://www.springer-spektrum.de)

*Dieses Buch ist der Erinnerung an den kanadischen Mathematiker und Informatiker **Ivan Rival** (1947–2002) gewidmet. Ivan hat die Theorie der geordneten Mengen mit großer Tatkraft voran gebracht und viele Mathematiker, darunter auch den Autor dieses Buches, davon begeistern können.*

*Ivan Rival ist es zu verdanken, dass der Forschungsstand der Ordnungstheorie in den 1980er Jahren zusammengetragen und dokumentiert wurde, nämlich in den vier von ihm herausgegebenen Konferenzbänden *Ordered Sets* [8], *Graphs and Order* [9], *Combinatorics and Ordered Sets* [10] und *Algorithms and Order* [11] auf zusammen über 2000 Seiten.*

*1984 gründete Ivan Rival die Fachzeitschrift *Order* (“A Journal on the Theory of Ordered Sets and its Applications”).*

*Ich hoffe, dass ihm dieses Buch gefallen hätte.*

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Los geht's</b> .....	1
1.1	Inhalt und Absicht .....	1
1.2	Routenplan .....	2
1.3	Stil und gute Sitten .....	3
1.4	Literatur .....	4
<b>2</b>	<b>Vom Nacheinander zur Ordnung</b> .....	7
2.1	Vorgänge in der Zeit .....	8
2.2	Ordnungen und strikte Ordnungen .....	10
2.3	Ein Algorithmus von E. Lawler .....	13
2.4	Geordnete Mengen .....	14
<b>3</b>	<b>Lineare Ordnungen</b> .....	21
3.1	Ordnungserweiterungen .....	21
3.2	Lineare Erweiterungen .....	23
3.3	Ordnungswahrscheinlichkeiten .....	27
3.4	Unendliche Ketten und das Lemma von M. Zorn .....	29
<b>4</b>	<b>Enthaltensein von Figuren</b> .....	33
4.1	Ein Satz von R.P. Dilworth .....	34
4.2	Das Auswahlprinzip von R. Rado .....	37
4.3	Enthaltensein von Mengen .....	40
4.4	Ketten und Antiketten von Mengen .....	42
<b>5</b>	<b>Dimensionstheorie: Ketten</b> .....	47
5.1	Ordnungsdimension .....	47
5.2	Produkte von Ketten .....	50
5.3	Bestimmung der Ordnungsdimension .....	53
5.4	Endliche zweidimensionale Ordnungen .....	55

<b>6</b>	<b>Begriffliche Ordnung</b> .....	61
6.1	Aus jeder Relation ein Begriffsverband .....	61
6.2	Verbände .....	65
6.3	Beispiele vollständiger Verbände .....	68
6.4	Merkmalexploration .....	73
<b>7</b>	<b>Rechnen mit Hüllenoperatoren</b> .....	79
7.1	Mengenoperator und Mengensystem .....	79
7.2	Ein Algorithmus zur Erzeugung aller Hüllen .....	84
7.3	Formale Begriffe berechnen .....	86
7.4	Galoisverbindungen .....	89
<b>8</b>	<b>Strukturtheorie: Unterverbände</b> .....	95
8.1	Irreduzible Elemente und die Pfeilrelationen .....	97
8.2	Kontextkonstruktionen .....	101
8.3	Elementare Standardskalen .....	105
8.4	Vollständige Unterverbände und Ketten .....	106
<b>9</b>	<b>Von Ordnungen zu Verbänden</b> .....	111
9.1	Die Vervollständigung .....	111
9.2	Ordnungsideale und Ordnungsfiler .....	116
9.3	Maximale Antiketten .....	122
9.4	Konvexe Mengen .....	123
<b>10</b>	<b>Dimensionstheorie: Ferrers-Relationen</b> .....	127
10.1	Die Ferrers-Dimension .....	127
10.2	Ein Beispiel, kritische Paare und Pfeile .....	131
10.3	Unverträglichkeitsgraph und -hypergraph .....	134
10.4	$k$ -Dimension .....	137
<b>11</b>	<b>2-Dimension und Faktoranalyse</b> .....	141
11.1	Mengendarstellungen und 2-Dimension .....	142
11.2	Boolesche Faktoranalyse .....	145
11.3	Ordinale Faktoranalyse .....	148
11.4	Gruppentests .....	151
<b>12</b>	<b>Kurz und bündig</b> .....	157
12.1	Relationen und Mengenfamilien .....	157
12.2	Lineare Erweiterungen .....	160
12.3	Geordnete Mengen .....	160
12.4	Antiketten und die Potenzmenge .....	162
12.5	Vollständige Verbände .....	165
12.6	Begriffsverbände .....	167

Inhaltsverzeichnis	IX
<hr/>	
12.7	Kontextmanipulationen . . . . . 169
12.8	Kontexte aus Ordnungen . . . . . 171
12.9	Die Ferrers-Dimension . . . . . 172
12.10	Mengendarstellungen und Anwendungen . . . . . 174
<b>Literaturverzeichnis</b>	. . . . . 175
<b>Sachverzeichnis</b>	. . . . . 177